測量平差概論　第一次修訂增補

一、第 2 頁，打靶的例子，圖 2－1（d）

茲將該圖修訂如右，

用紙條累計各彈孔之 x 坐標（向右為正）、

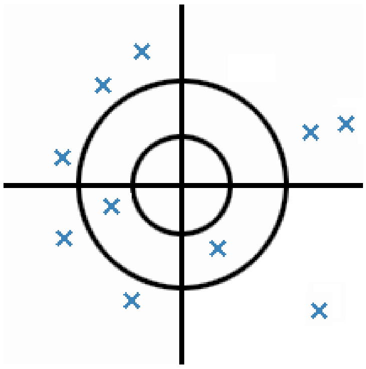
y 坐標（向上為正），可得平均坐標：

$\bar{x} = (x_1 + x_2 \cdots\cdots + x_{10}) \div 10 \fallingdotseq 0$

$\bar{y} = (y_1 + y_2 \cdots\cdots + y_{10}) \div 10 \fallingdotseq 0$

令 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$\bar{r} = (r_1 + r_2 \cdots\cdots + r_{10}) \div 10$



修正之圖 2－1（d）

（本圖之 $\bar{r}$ 甚大於（a）圖之 $\bar{r}$）

再說，令同一槍手重複射擊 100 回，每回射擊 10 顆子彈，100 回也難有 1 回得到（$\bar{x}$≒0，$\bar{y}$≒0）之結果，亦即重複發生（$\bar{x}$≒0，$\bar{y}$≒0）之機率甚低，總之，沒有精密度就不能保證重複實現。此外，各回之 $\bar{r}$ 總是甚大。

可是神槍手重複射擊 100 回，每回射擊 10 顆子彈，可以重複多次得到類同（a）圖之結果，且各回之 $\bar{r}$ 總是甚小。只要有精密度就一定能保證重複實現。測量才有意義。

二、最或是值與真值

依據測量平差法理論，假設沒有系統誤差，最或是值 x 為 n 次觀測值之平均值，

$\bar{x} = (x_1 + x_2 \cdots\cdots + x_n) \div n$

且當 n→∞ 時，最或是值 x→真值 T，亦即 x≒T。

此一論述稍不注意就會犯錯，誤以為 x＝T。

因為在實務上不會觀測無窮多次，所以 x≠T。

又因為系統誤差永遠存在，而且依據測量實務，假設系統誤差甚小，以慣用之儀器測量，通常只測量 2 或 3 次（特殊狀況為 4 次或以上），然後依據：

2 次觀測之較差，或

各次觀測值與 3 次平均值的差值

判定是否初步合格？

若不合格，則繼續觀測至合格。

若合格，則處理系統誤差並且取平均，得最或是值 x，只能說 x≒T。

簡言之，既然觀測存有系統誤差，又不能測量無窮多次，就不能得到真值 T，只能得到最或是值 x。至於 x 接近 T 之程度如何，就要看整個觀測過程的正確度與精密度之高低，甚至後續計算處理之合理程度了。（初學者做就好了，不必想那麼多）

三、第 4 頁，圖 2-2

錯誤之處有二，一為應該刪除表示頻率之縱軸，二為以虛線描繪之曲線，應依據下式計算：

$f(\Delta)=(1/\sigma\sqrt{(2\pi)})e^{-(\Delta^2/\sigma^2)/2}$

以 $\sigma=1.2''$，

$\Delta=0''$、$1''$、$2''$、$3''$、$4''$，依次代入得

$f(\Delta)=0.333$、0.235、0.083、0.015、0.0013，單位「秒$^{-1}$」

該曲線左右對稱，修正後之圖形如下：

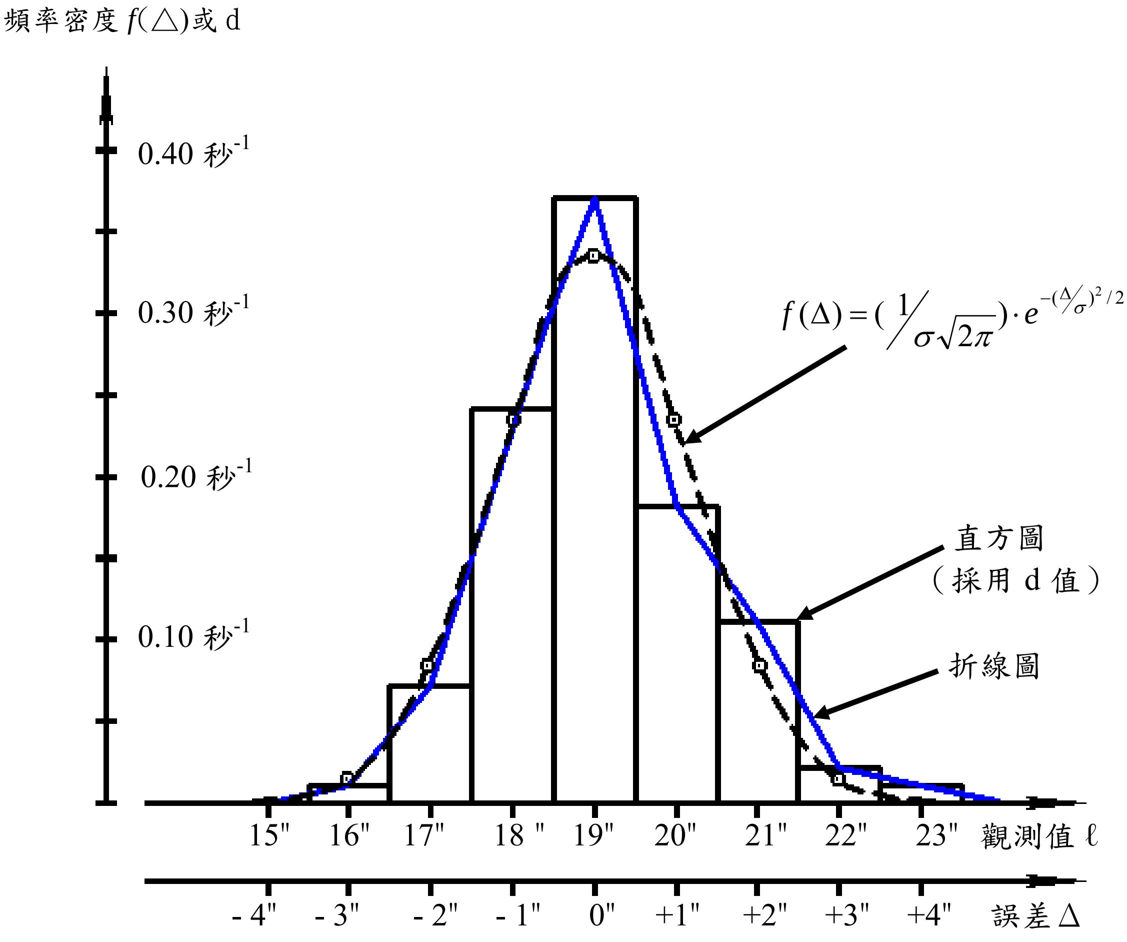


圖 2-2　頻率密度直方圖、折線圖與曲線圖

（圖中之直方圖各長方條之面積和為 1，曲線下之面積近似為 1）

為了辨別頻率與頻率密度之差異，另作圖 2-2' 桿狀圖如下，

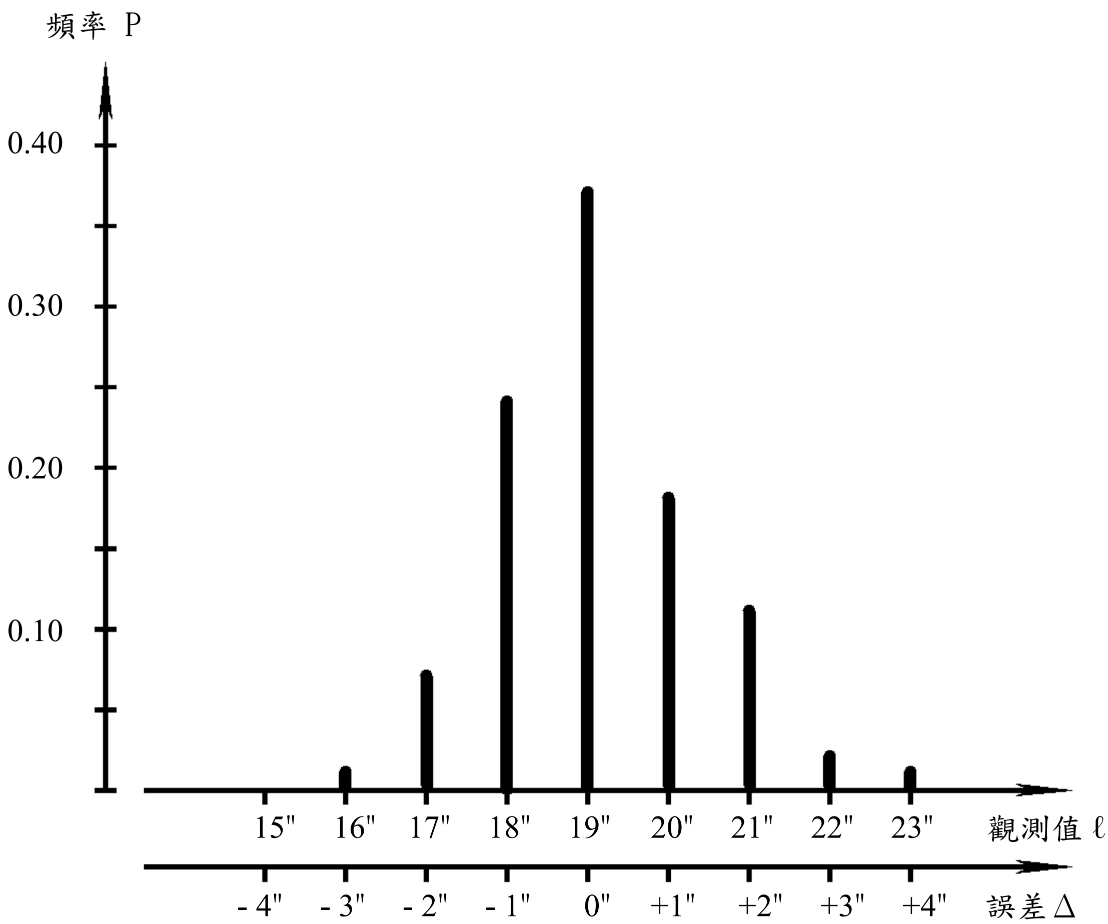


圖 2-2'　　桿狀圖（圖中各桿長為頻率，其和為 1）

四、加強說明頻率與頻率密度之意義及差異

頻率＝「區間中點之頻率密度」×「區間」

頻率，沒有單位；頻率密度，區間之倒數為其單位。

圖 2-2 之區間為 1"，若省略單位，則頻率與頻率密度之數值相同，圖 2-2’之桿長與圖 2-2 之直方柱長相同。必需將區間改為不等於 1"，例如 0.5"，才能顯出二者之差異。

依據 表 2-2 威特 T2 符合法讀數誤差分佈表，故意將區間 1"改為 0.5"，模擬列出表 2-2A 如下：

表 2-2A 模擬數據

代表值 l	16”		17”		18”		19”		20”		21”		22”		23”	
次數 m	1		8		29		44		22		13		2		1	
代表值 l* （單位 秒）		16 1/4	16 3/4	17 1/4	17 3/4	18 1/4	18 3/4	19 1/4	19 3/4	20 1/4	20 3/4	21 1/4	21 3/4	22 1/4	22 3/4	
誤差 Δ* （單位 秒）		-2.75	-2.25	-1.75	-1.25	-0.75	-0.25	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	
次數 m*		1	2	6	12	17	24	20	12	10	8	5	2	0	1	
頻率 p*		0.008	0.017	0.050	0.100	0.142	0.200	0.167	0.100	0.083	0.067	0.042	0.017	0	0.007	
頻率密度 d* （單位 $秒^{-1}$）		0.015	0.034	0.100	0.200	0.284	0.400	0.334	0.200	0.166	0.134	0.084	0.034	0	0.015	
備註	1、〔m〕＝120 ， 〔m*〕＝120 2、以模擬數據計算，仍得 x*≒19.1"，取 x*＝19" 〔$(\Delta^*)^2$〕＝168.5 $秒^2$，$\sigma^*＝(168.5\div119)^{1/2}$＝1.2 秒 3、頻率 p*＝m*÷120 ，四捨五入，再微調使得〔p*〕＝1 4、頻率密度 d*＝p*÷0.5"，四捨五入，再微調使得〔d*〕＝2 $秒^{-1}$																

依據上表繪製圖 2-2A-1、圖 2-2A-2 如下：

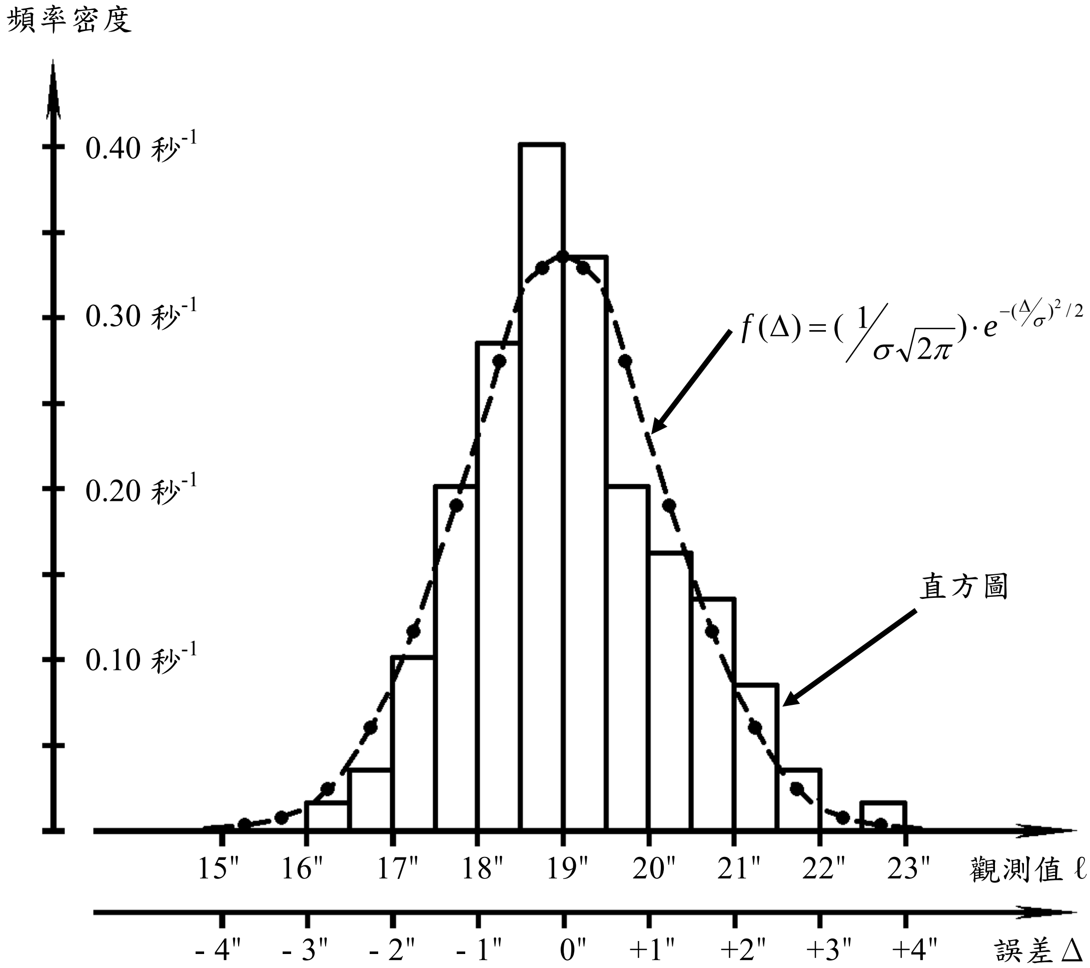


圖 2-2A-1　曲線圖與區間 0.5"之直方圖

（各長方條之面積和為 1，曲線下之面積近似為 1，本圖之曲線與圖 2-2 之曲線相同）

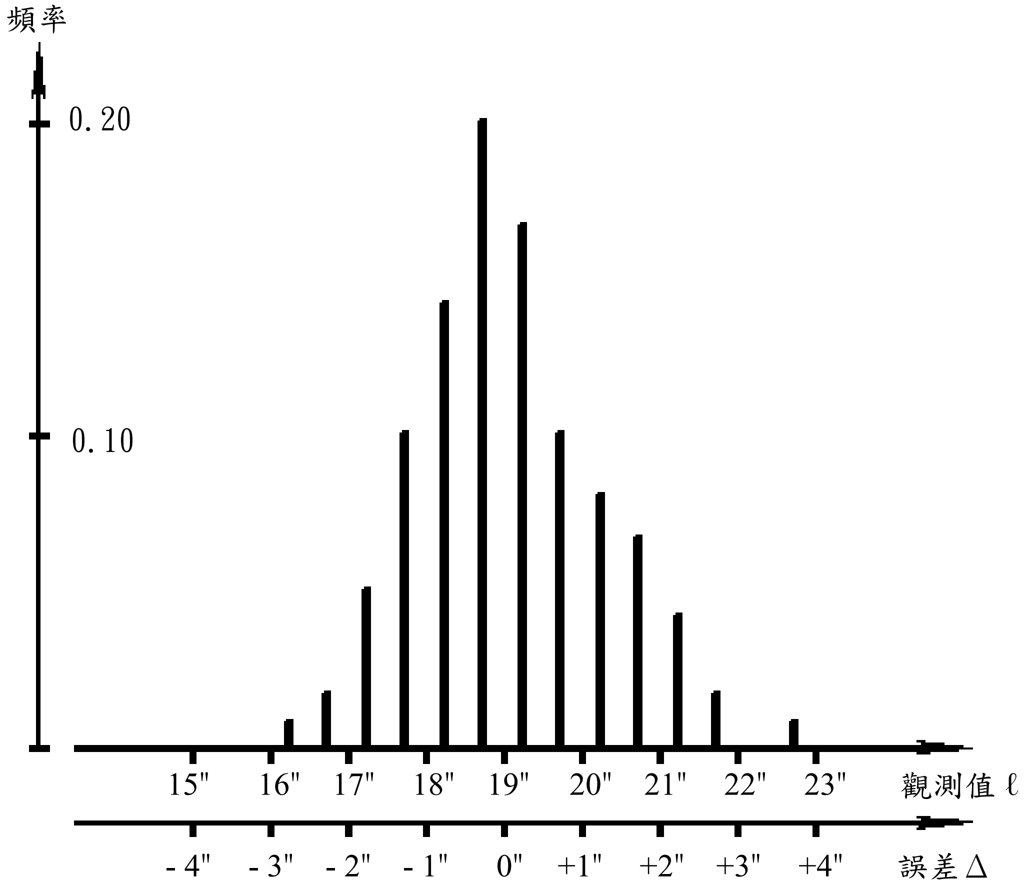


圖 2-2A-2　區間 0.5"之桿狀圖（圖中各桿長為頻率，其和為 1）

（本圖 18.75"，19.25"所對應之桿長之和，等於圖 2-2'，19"所對應之桿長，其餘亦同）

（※模擬數據及圖 2-2A-1、圖 2-2A-2，用以說明頻率與頻率密度之差異，請勿追究其合理性）

五、第 9 頁公式（2）

其中 $\lim_{x\to\infty}$應改為 $\lim_{n\to\infty}$

六、第 15 頁，6.矩形面積之中誤差，並以圖 2－4 表示幾何意義，其中說到正方形之中誤差，

針對 $A = x^2$之誤差傳播，輔以拋物線函數圖形說明如下：

$A = x^2$

$dA = 2x\ dx$

$\sigma_A = 2x\ \sigma_x$

［例］ $x_1 = 1.2$ m ， $A_1 = 1.44$ m²

$\Delta x = 0.03$ m，求面積之誤差。

［解 1］ 重複計算法

$x_2 = x_1 + \Delta x = 1.23$ m

$A_2 = x_2^2 = 1.5129$ m²

$\Delta A = A_2 - A_1 = 0.0729$ m²

［解 2］ 微分法

$dA = 2\ x\ dx = 2 \cdot x_1 \cdot \Delta x$

$= 2 \cdot 1.2 \cdot 0.03 = 0.072$ m²

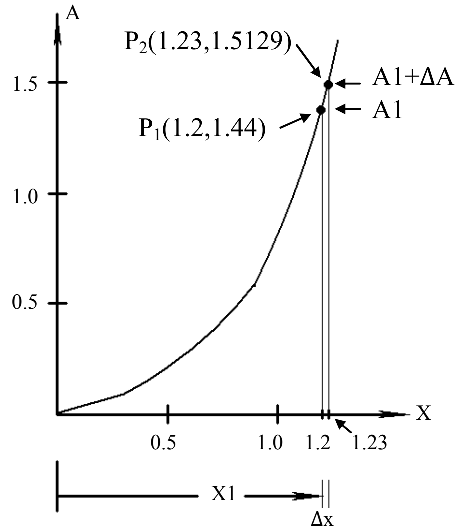


圖 2-5 拋物線函數圖形

微分法與重複計算法之差異

$\Delta A - dA = 0.0729 - 0.072$

$= 0.0009$ m² $= (\Delta x)^2$ ，(0.0009 m²，差異甚小）

［解 3］ 圖解法

圖解法其實就是微分法之應用：

微分法　 $dA = 2x\ dx$

斜率＝導數 $dA/dx = 2\ x = 2 \cdot 1.2 = 2.4$

此為拋物線 $A = x^2$ 在 P_1（1.2，1.44）之切線之斜率＝ 2.4

作圖 2-6，此圖為圖 2-5 拋物線函數圖形在點 P_1附近之局部放大，過 P_1各作切線、水平線與過 P_2（1.23，1.5129）垂線之交點，令為 P_2'、Q，

Q 之 x 坐標為 1.23、 A 坐標為 1.44

Q P_1 之長為 0.03

Q P_2'之長為 $2.4 \cdot 0.03 = 0.072$ m²

$= dA$

P_2'之 x 坐標仍為 1.23，

A 坐標為 1.44＋0.72＝ 1.512

P_2P_2'之長為 1.5129－1.512

$= 0.0009$ m² $= (\Delta x)^2 = (dx)^2$

（P_2P_2'之長 0.0009 m²為面積）

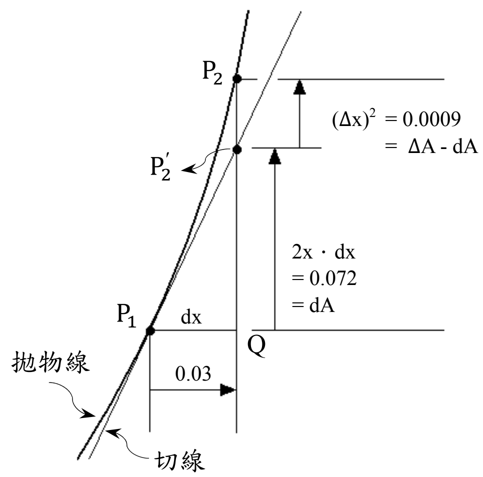


圖 2-6 圖解法表示ΔA－dA

［特別說明］

1、微分與重複計算二法之差異量為（Δx）^{2}，微分法省略了（Δx）^{2}，此為二次微小量，其值甚小，可忽略。 若不計此微小量，則微分與重複計算二法可視為相同。誤差傳播之問題，不計二次微小量。

2、某些誤差傳播之問題，不易微分，也不易重複計算求解時，可以採用圖解法。

七、致謝

本文（第一次修訂增補）中之插圖及表格，均由本系同仁及其友人代為以電腦製作，謹致十二萬分之謝意。

八、致歉

我在退休四年之後，於民國 98 年 11 月 12 日發表測量平差概論，作為土木、建築、水利、測量等科系測量學及實習之輔助教材，彼時已無工作壓力，也檢查過許多次，自認沒有重大錯誤及欠缺。去年與學長討論最或是值與真值的問題，今年（民國 101 年）再次檢查，發現一些錯誤與缺失，更改增補如上，敬請讀者海涵，並請轉告測量同行。如果仍有錯誤缺失，敬請測量賢達不吝指教。

退休講師　　白巨川 敬啟

民國 101 年 9 月 3 日